- *Tavole di sopravvivenza: L_x, distinte per sesso ($\omega_{m,f}$ = età estrema)*

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#} L_{x,\,\#} \quad {}_{m,f}}$$

- *Tavole di eliminazione: d_x*

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#-1} d_{x,\#} = L_{x,\#} - L_{x+1,\#}}$$

- *Probabilità di sopravvivenza: p_x*

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#-1} p_{x,\#} = \frac{L_{x+1,\#}}{L_{x,\#}}}$$

- *Probabilità di eliminazione: q_x*

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#-1} q_{x,\#} = \frac{d_{x,\#}}{L_{x,\#}} = \frac{L_{x,\#} - L_{x+1,\#}}{L_{x,\#}} = 1 - \frac{L_{x+1,\#}}{L_{x,\#}} = 1 - p_{x,\#}}$$

- *Probabilità di (n) sopravvivenza: ${}_np_x$*

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#-1} \mathop{\square}_{n=1}^{\omega_\#-x} {}_np_{x,\#} = \frac{L_{x+n,\#}}{L_{x,\#}} \qquad ({}_1p_{x,\#} = p_{x,\#})}$$

- *Probabilità di (n) eliminazione: ${}_{/n}q_{x}$, ${}_{w/n}q_{x}$, ${}_{w/}q_{x}$,*

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#-1} \mathop{\square}_{n=1}^{\omega_\#-x} {}_{/n}q_{x,\#} = \frac{L_{x,\#} - L_{x+n,\#}}{L_{x,\#}} = 1 - \frac{L_{x+n,\#}}{L_{x,\#}} = 1 - {}_np_{x,\#} \qquad ({}_{/1}q_{x,\#} = q_{x,\#})}$$

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#-1} \mathop{\square}_{n=1}^{\omega_\#-x} \mathop{\square}_{w=0}^{\omega_\#-x-n} {}_{w/n}q_{x,\#} = {}_wp_{x,\#} \cdot {}_{/n}q_{x+w,\#} = \frac{L_{x+w,\#}}{L_{x,\#}} \cdot \frac{L_{x+w,\#} - L_{x+w+n,\#}}{L_{x+w,\#}} = \frac{L_{x+w,\#} - L_{x+w+n,\#}}{L_{x,\#}}}$$

$$\boxed{\mathop{\square}_{x=0}^{\omega_\#-1} \mathop{\square}_{w=0}^{\omega_\#-x-1} {}_{w/}q_{x,\#} = {}_wp_{x,\#} \cdot q_{x+w,\#} = \frac{L_{x+w,\#} - L_{x+w+1,\#}}{L_{x,\#}} \qquad ({}_{0/1}q_{x,\#} = q_{x,\#})}$$

- *Vite medie: $e_{x,}$*

$$\mathop{\square}\limits_{x=0}^{\omega_\#-1} e_{x,\#} = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_{x,\#}} \sum_{n=1}^{\omega_\#-x} L_{x+n,\#} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\omega_\#-x} {}_n p_{x,\#}$$

- *Vite totali: $x+e_{x,}$*

$$\mathop{\square}\limits_{x=0}^{\omega_\#-1} \hat{e}_{x,\#} = x + e_{x,\#} = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{L_{x,\#}} \sum_{n=1}^{\omega_\#-x} L_{x+n,\#} = x + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\omega_\#-x} {}_n p_{x,\#}$$

- *Simboli di commutazione: D_x*

$$\mathop{\square}\limits_{x=0}^{\omega_\#} D_{x,\#} = L_{x,\#} \cdot v^x$$

- *Simboli di commutazione (capitale differito): ${}_nE_x$*

$$\mathop{\square}\limits_{x=0}^{\omega_\#-1} \mathop{\square}\limits_{n=1}^{\omega_\#-x} {}_n E_{x,\#} = \frac{D_{x+n,\#}}{D_{x,\#}} = \frac{L_{x+n,\#} \cdot v^{x+n}}{L_{x,\#} \cdot v^x} = {}_n p_{x,\#} \cdot v^n$$

- *Simboli di commutazione: N_x*

$$\mathop{\square}\limits_{x=0}^{\omega_\#-1} N_{x,\#} = \sum_{n=1}^{\omega_\#-x} D_{x+n,\#}$$

- *Simboli di commutazione (rendita vitalizia): a_x*

$$\mathop{\square}\limits_{x=0}^{\omega_\#} a_{x,\#} = \sum_{n=1}^{\omega_\#-x} {}_n E_{x,\#} = \frac{\sum_{n=1}^{\omega_\#-x} D_{x+n,\#}}{D_{x,\#}} = \frac{N_{x,\#}}{D_{x,\#}}$$

Esercizio

Un soggetto (maschio) di anni 58 decide di versare annualmente e posticipatamente € 10000 per 12 anni al fine di ottenere, alla conclusione dei versamenti, una rendita pensionistica nelle seguenti due ipotesi:

- *rendita annuale posticipata (certa) per un periodo di tempo pari al doppio di quello di versamento (24 anni),*
- *rendita vitalizia posticipata (aleatoria).*

Supponendo che il tasso di interesse effettivo annuo utilizzato sia il del 5%, si chiede:

- *la rata della rendita certa e l'andamento del montante contributivo.*
- *la rata della rendita aleatoria e l'andamento del montante contributivo, tenendo ovviamente conto delle probabilità di erogazione delle singole rate.*

Essendo chiaro che in entrambi i casi, il processo dovrà terminare con l'azzeramento finale del montante contributivo, si chiedono i grafici comparativi delle rate pagate e riscosse dal soggetto e i grafici dell'andamento dei montanti contributivi.

- *Rendita pensionistica certa: importo della pensione*

$$R = 10000 \cdot \frac{s_{\overline{12}|0.05}}{a_{\overline{24}|0.05}} = 10000 \cdot \frac{15.917127}{13.798642} = 10000 \cdot 1.153528 = 11535.28$$

- *Rendita pensionistica certa: montante contributivo*

$$M_0 = 0 \ , \ \mathop{\square}_{t=1}^{12} M_t = M_{t-1} \cdot 1.05 + 10000 \ , \ \mathop{\square}_{t=13}^{24} M_t = M_{t-1} \cdot 1.05 - 11535.28$$

- *Rendita pensionistica aleatoria: importo della pensione*

$$R = 10000 \cdot \frac{s_{\overline{12}|0.05}}{a_{70;0.05}} = 10000 \cdot \frac{15.917127}{9.287614} = 10000 \cdot 1.713801 = 17138.01$$

- *Rendita pensionistica aleatoria: montante contributivo*

$$M_{58} = 0 \ , \ \mathop{\square}_{x=59}^{70} M_x = M_{x-1} \cdot 1.05 + 10000 \ , \ \mathop{\square}_{x=71}^{110} M_x = M_{x-1} \cdot 1.05 - 17138.01 \cdot {}_{x-70}p_{70}$$